

# Formális nyelvűk és automaták

## 10. előadás

Vasził György

Számítógéptudományi  
Tanár

110-es szoba

<http://w1.inf.unideb.hu/web/vasził/oktatas>

[vasził.györgy@inf.unideb.hu](mailto:vasził.györgy@inf.unideb.hu)

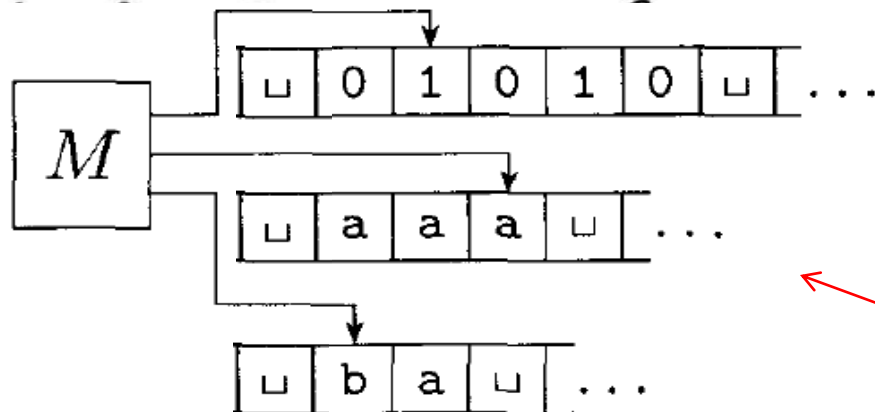
# A múltkor

- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

# Variáció Turing gépe

- Egy nalez helyett  $k$  nalez, az input az első nalezra van.

$$\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$



*Ezen a példán  $k=3$*

# Például:

$L = \{ w \# w \mid w \in \{0,1\}^* \}$  felismerő Turing géppel.

┐	↓	0	1	1	0	0	0	#	0	1	1	0	0	0	┐	...
┐	x	↓	1	1	0	0	0	#	0	1	1	0	0	0	┐	...
┐	x	1	1	0	0	0	#	↓	x	1	1	0	0	0	┐	...
┐	↓	x	1	1	0	0	0	#	x	1	1	0	0	0	┐	...
┐	x	↓	x	1	0	0	0	#	x	1	1	0	0	0	┐	...
┐	x	x	↓	x	x	x	x	#	x	x	x	x	x	x	┐	...

accept

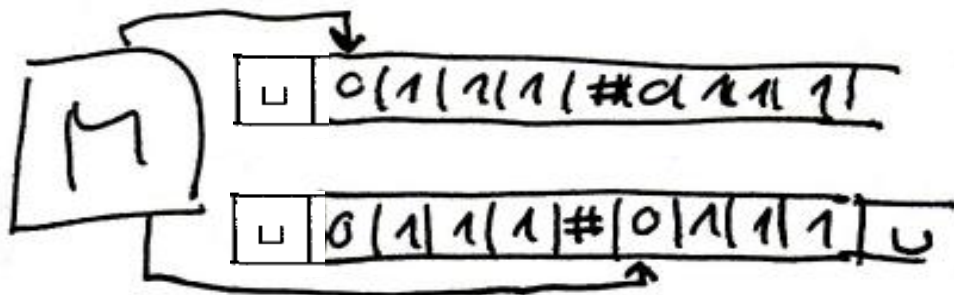
(L nem környezetfüggetlen!)

$$L = \{ w \# w \mid w \in \{0,1\}^* \} \text{ kinnir}$$

2 gættar

Rajzoljuk le!

1.  $w \# w$  an elvő nálogra
2. kényszerít a +  $w \# w$ -t a kényszerít nálogra
3. an elvő fejét állítsuk a nálog elejére, a kényszerít a + jele
4. mindkét fejét lepredjünk jobbra és kényszerít a + an olvasott jeleket



5. elfogadjuk, ha # - t és k - t egyenre találunk a gépen

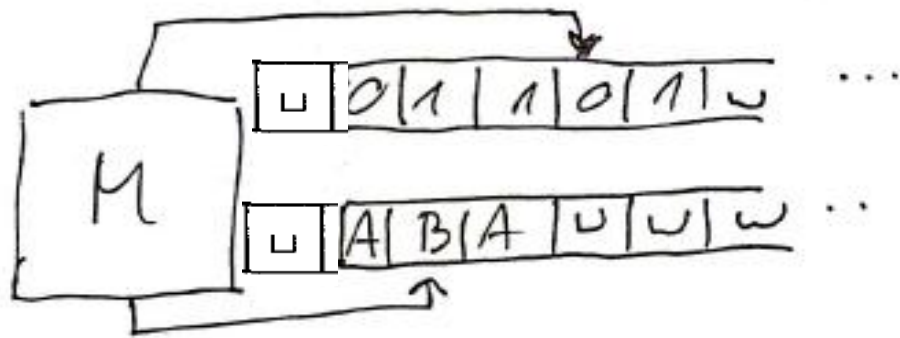
$k$  nálaags í 1 nálaags Turing gæp

Tétel : Miðer  $k$  nálaags  $T_1$  Turing gæp  
leitar og 1 nálaags  $T_2$  Turing gæp,

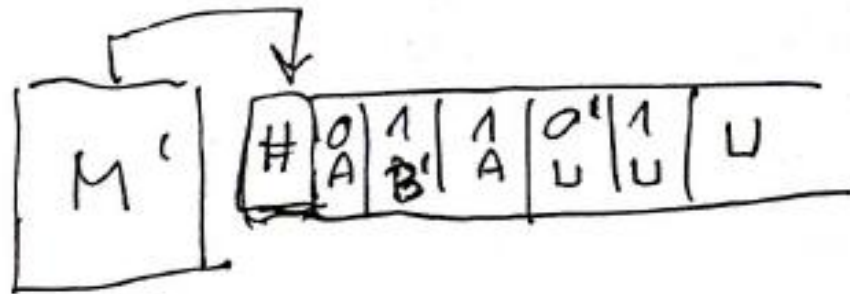
og  $L(T_1) = L(T_2)$  í megállás, ~~í~~  
he elfogadták a lemelet, akkor  $T_1$  és  $T_2$   
nálaags (elő nálaags) ugyan  
van íva.

2 values  $\rightarrow$  1 value

Alap gondolat



$$\Gamma = \{0, 1, A, B, \dots\}$$



$$\Gamma' = \{ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline A \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 0' \\ \hline A \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline B \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline A \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline U \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 0' \\ \hline U \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline U \end{array}, \dots$$

# A könyvekben

- J. Martin: 7.5 fejezet, 243-246. oldal
- Dömösi et al.: ----
- Herendi\*: 4.6 fejezet, 33-38. oldal

\*Herendi Tamás: Számításelmélet, jegyzet.

*[http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/  
2011-0103\\_25\\_szamitaselmélet/2011-0103\\_25\\_szamitaselmélet.pdf](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0103_25_szamitaselmélet/2011-0103_25_szamitaselmélet.pdf)*

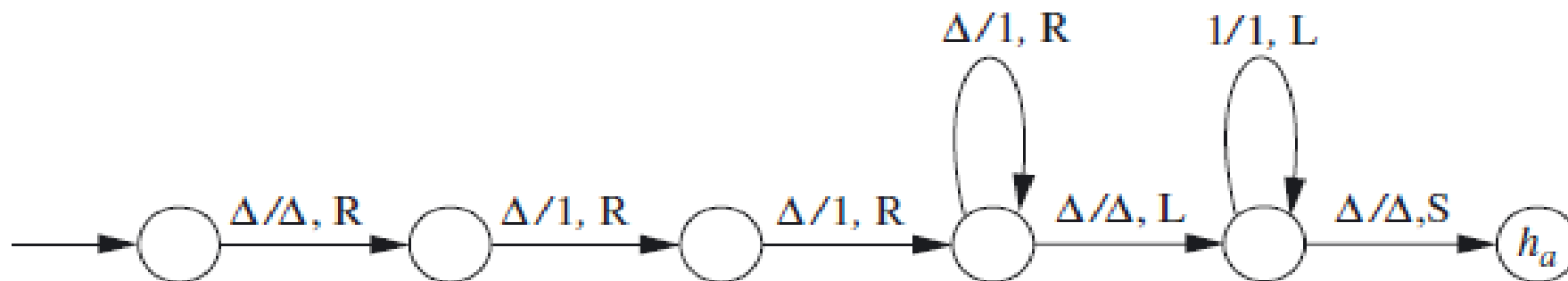


# A múltkor

- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

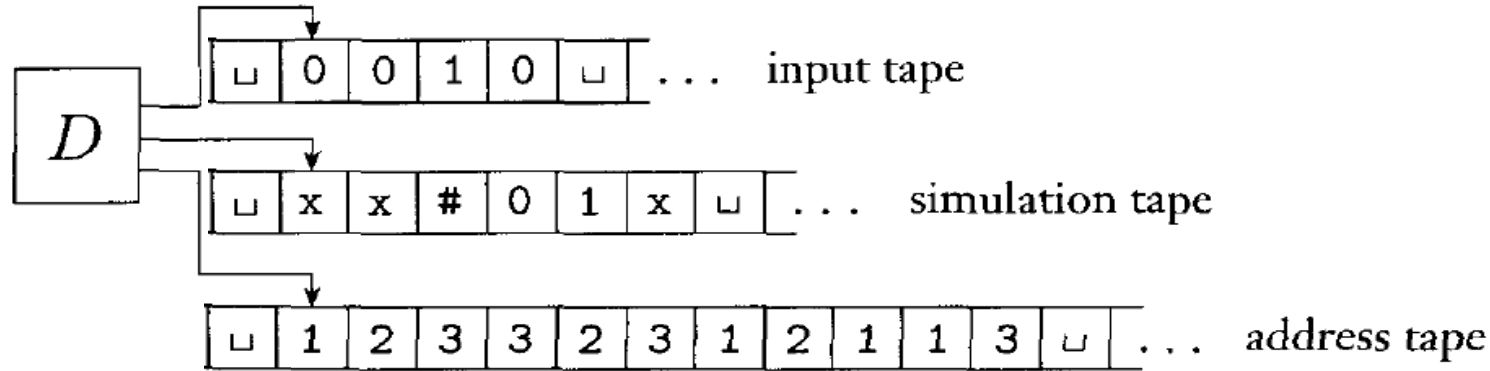
# Nemdetrminisztikus Turing gép

Például: (Mit művel?)



117

Nendat. Turing gép →  
 → det. Turing gép



1. Az input az első nalezsa van
2. Mire megér a utolsó a 2. nalezsa
3. Simuláljuk a 2. nalezsa a számítási  
 fázisát az utolsó, amit a 3. nalezsa  
 leolvas. Ha a számítási fázis vége,  
 kilépjük a hirtelen utol a 3.  
 nalezsa, és vissza a 2. pontra.

# A könyvekben

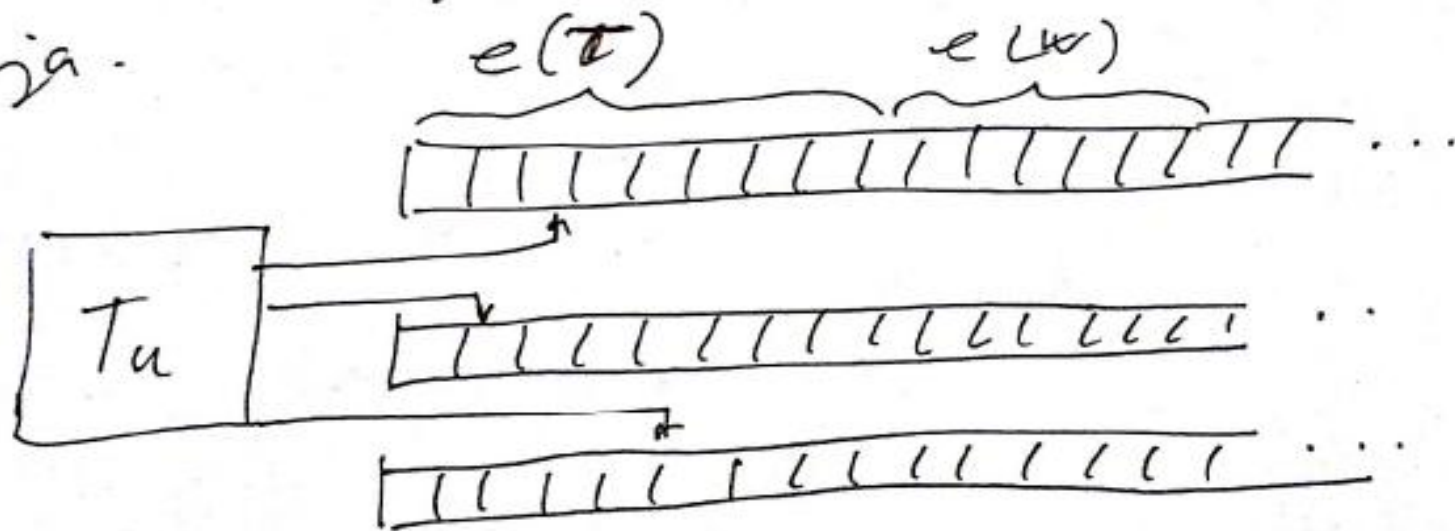
- J. Martin: 7.7 fejezet, 248-252
- Dömösi et al.: ---
- Herendi: 6. fejezet, 59-65. oldal

# A múltkor

- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

## Üniversaali Turing gép

Egy leeges  $T_u$  Turing gép, amelyre felrakjuk  
valószínű Turing gép működését leíró  
leírást.



Az első nyalogra  $T$  kódját ( $e(\tau)$ ) és a másodikra ( $e(\omega)$ )  
írnak,  $T_u$  működését  $T$  működését  $\omega$ -ra.

$$s(\Delta) = 0$$

$$s(a_i) = 0^{i+1} \quad (\text{for each } a_i \in \mathcal{S})$$

$$s(h_a) = 0$$

$$s(h_r) = 00$$

$$s(q_i) = 0^{i+2} \quad (\text{for each } q_i \in \mathcal{Q})$$

$$s(S) = 0$$

$$s(L) = 00$$

$$s(R) = 000$$

Each move  $m$  of a TM, described by the formula

$$\delta(p, a) = (q, b, D)$$

is encoded by the string

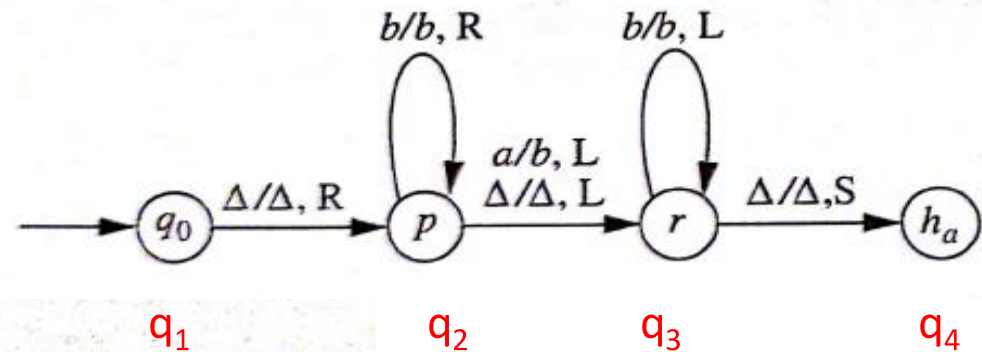
$$e(m) = s(p)1s(a)1s(q)1s(b)1s(D)1$$

and for any TM  $T$ , with initial state  $q$ ,  $T$  is encoded by the string

$$e(T) = s(q)1e(m_1)1e(m_2)1 \cdots e(m_k)1$$

where  $m_1, m_2, \dots, m_k$  are the distinct moves of  $T$ , arranged in some arbitrary order. Finally, any string  $z = z_1 z_2 \cdots z_k$ , where each  $z_i \in \mathcal{S}$ , is encoded by

$$e(z) = 1s(z_1)1s(z_2)1 \cdots s(z_k)1$$



0001 000101000010100011 00001000100001000100011 0000100100000100010011  
 0000101000001010011 000001000100000100010011 000001010101011



Tu mi' gò'de' e



# A könyvekben

- J. Martin: 7.8 fejezet, 252-257. oldal
- Dömösi et al.: ---
- Herendi: 5.1 fejezet, 39-41. oldal

# Ma

- Rekurzív és rekurzívan felsorolható nyelvek, problémák mint formális nyelvek
- Általános (szabály-)alakú grammatikák és Turing gépek
- Környezetfüggő grammatikák, a Chomsky féle nyelv-hierarchia

# A Turing gép mint "naïve logika modell" - számítási modell

1. A Turing gép általános célú számítási modell
2. Rendszeres programozható
3. Működési szabályok precíz

⇒ Alkalmazható kiterjedően a "számítás"  
más néven az "algorithmus" fogalmának  
formalizálására

# Church - Turing tejs

Alfred Church logikán, matematikán

Alan Turing matematikán, XX. század  
első fele, Gödel

"A Turing gép mindig tud", azaz, ha van  
egy problémára "mechanikus eljárás"  
vagy az leírható megoldás (algoritmus), akkor  
egy Turing gép is meg tudja oldani.

Ha egy probléma Tüning géppel nem lehet  
megoldani, akkor az "mechanikus eljárás"  
nem algoritmus sem.

## Miért érdemes a Turing gépeket

A Turing gép mindig egy ~~eset~~ú  
nimitógépmodellel / nimitási modellel  
equiválos, ami lehetőséget nyújt arra,  
hogy a gép működését a leg  
könnyebben megérthessük.

## Árta

A Turing gép által mas az intuitív  
algoritmus - fogalom formalizálása.



precíz matematikai leírás, mechanika  
végrehető eljárás, ami végig jár  
lépésről lépésre a megoldásig.

## Hilbert 10. problema

Létezik-e eljárás ami eldönti, hogy  
egy adott egyváltozós polinommal van-e  
egy egyenlet.

$$Pl: 6x^3y^2z^2 + 3xy^2 - x^3 - 10$$

$$\text{egyenlet} : x=5, y=3, z=0$$

Ha de algoritme lătm, mes i lge  
djări mîser, nîsej uer a  
djări, an algoritmus predîz  
rezultarea.

→ A. Church :  $\lambda$ -calcul

A. Turing : Turing gîp

(1936)



## Church-Turing tézis

„A Turing gép minden tudat,“ azaz, ha  
egy probléma „mechanikus eljárással“,  
azaz valamilyen módszerrel, akkor azt  
egy Turing gép is meg tudja oldani.

Ha Turing géppel nem lehet megoldani, akkor  
mikor „mechanikus eljárás“/algoritmus.

## Korussian febrabato' s' verruiv uelver

- Es L uelver verruiv, ha na aza  
Tung gep, ani unde  $x \in L$  nit elfo-  
gad s' unde  $x \notin L$  nit elutan't
- Es L uelver verruivan febradhto', ha  
na aza Tung gep ani unde  $x \in L$  nit  
elfogad. A  $x \notin L$  navaret pedig  
wen elutan'ig, wen ily  
hemetse nem all weg.

(Köörle wird lättr' emet a jentörset) 6

## Rekurzívan felismerhető és rekurzív nyelvet

(2. megfogalmazás)

- Egy  $L$  nyelv rekurzív, ha van olyan Turing gép, ami eldönti a karakterisztikus függvényét
- Egy  $L$  nyelv rekurzívan felismerhető, ha van olyan Turing gép, ami elfogadja,  $L = L(T)$

# Hilbert problémája mint formális nyelv, a polinomok mint sztringek

Az ábécé:  $\{0, 1, 2, \dots, 9, x, +, -, *\}$

– a számok 10-es számrendszerben

– a változók:  $x_1, x_2, \dots$

– a műveleti jelek:  $+, -, *$

Pl.:

$$6x^2 y z^2 + 3x y^2 - x^3 - 10 \quad \longleftrightarrow \quad 6x_1^2 x_2 x_3^2 + 3x_1 x_2^2 - x_1^3 - 10$$

A polinomot leíró sztring:

$$6 * x_1 * x_1 * x_2 * x_3 * x_3 + 3 * x_1 * x_2 * x_2 - x_1 * x_1 * x_1 - 10$$

## Hilbert's conjecture:

$L_p = \{ p \mid p \text{ polynomial in } \text{exponential size} \}$

$L_p$  decidable? Jurij Matijasevich over  
Mendel's conjecture  
1970- Ben, says  $L_p$  is  
undecidable.

Complexity with circuit, says  $L_p$   
is undecidable

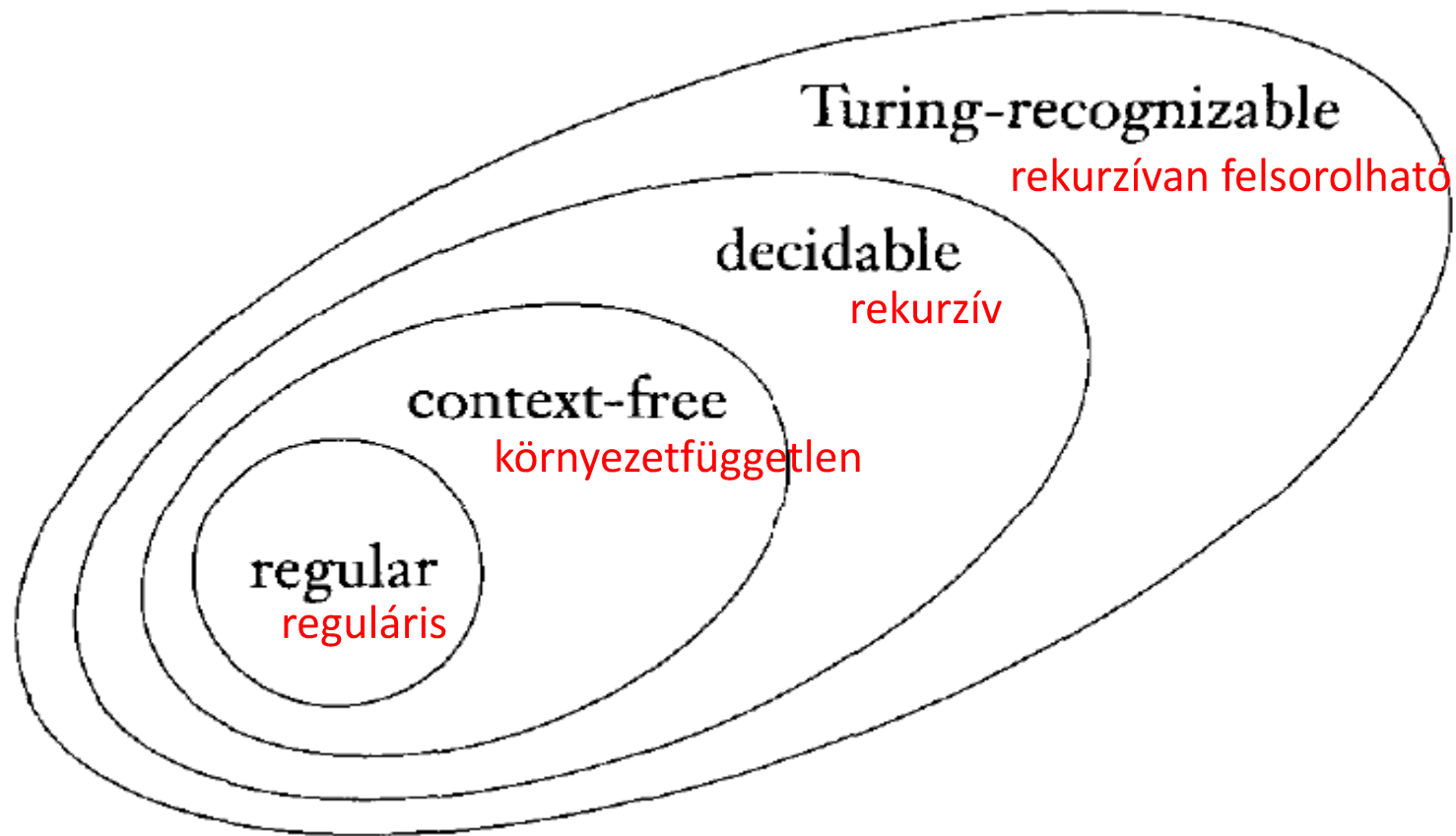


Ar egið gjöfni pólímerar  
helva reyni'ne þröval-  
hæti

Adalt en  $P_{\text{polimer}}$  k veltaríval. Vegni'ne  
en Tinsgeið, en veigignen en i 528  
~~en~~ egið nein k-asen. si hi þríhaldj,  
hæ gjöf-e p-ver. ~~hæ i 528, eld~~ hæ  
laldil i 528, eldgjaldj p-t.

(Glutaritari nen faggið tindi) ~~hæ i 528~~

La'har, la'hi fegnier



reguláris, környezetfüggetlen, eldönthető/rekurzív,  
rekurzívan felsorolható nyelvek

# Ma

- Rekurzív és rekurzívan felsorolható nyelvek, problémák mint formális nyelvek
- Általános (szabály-)alakú grammatikák és Turing gépek
- Környezetfüggő grammatikák, a Chomsky féle nyelv-hierarchia



# A'ltalan' alalan' grammatika

$G = (V, \Sigma, S, P)$  alalan'  $P$  grammatika

$$\alpha \rightarrow \beta$$

alalan' ,  $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$  ,  $\alpha$  talalan' nem terminális

Láttuk például korábban:

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ , ahol

$P = \{ S \rightarrow aSBC,$

$S \rightarrow abC,$

$CB \rightarrow BC,$

$bB \rightarrow bb,$

$bC \rightarrow bc,$

$cC \rightarrow cc \}$

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

## A'ltalanos alábbi grammatikák és Turing gépek

① Kétféle G grammatika létezik Turing gép,  
ahogy  $L(G) = L(T)$ .

- T teljesíti az a leírás
- A leírásból jobbra lévő részen T  
általánosan nem a teljes leírás  
alapján HOGYAN?
- Ha a leírás és a teljes nem megegyezik,  
elfogadjuk a leírásat.

(Ez a T nemdeterminisztikus.)

Hogyan generáljuk T a G-nel  
generálható-e szavakat?

Példa

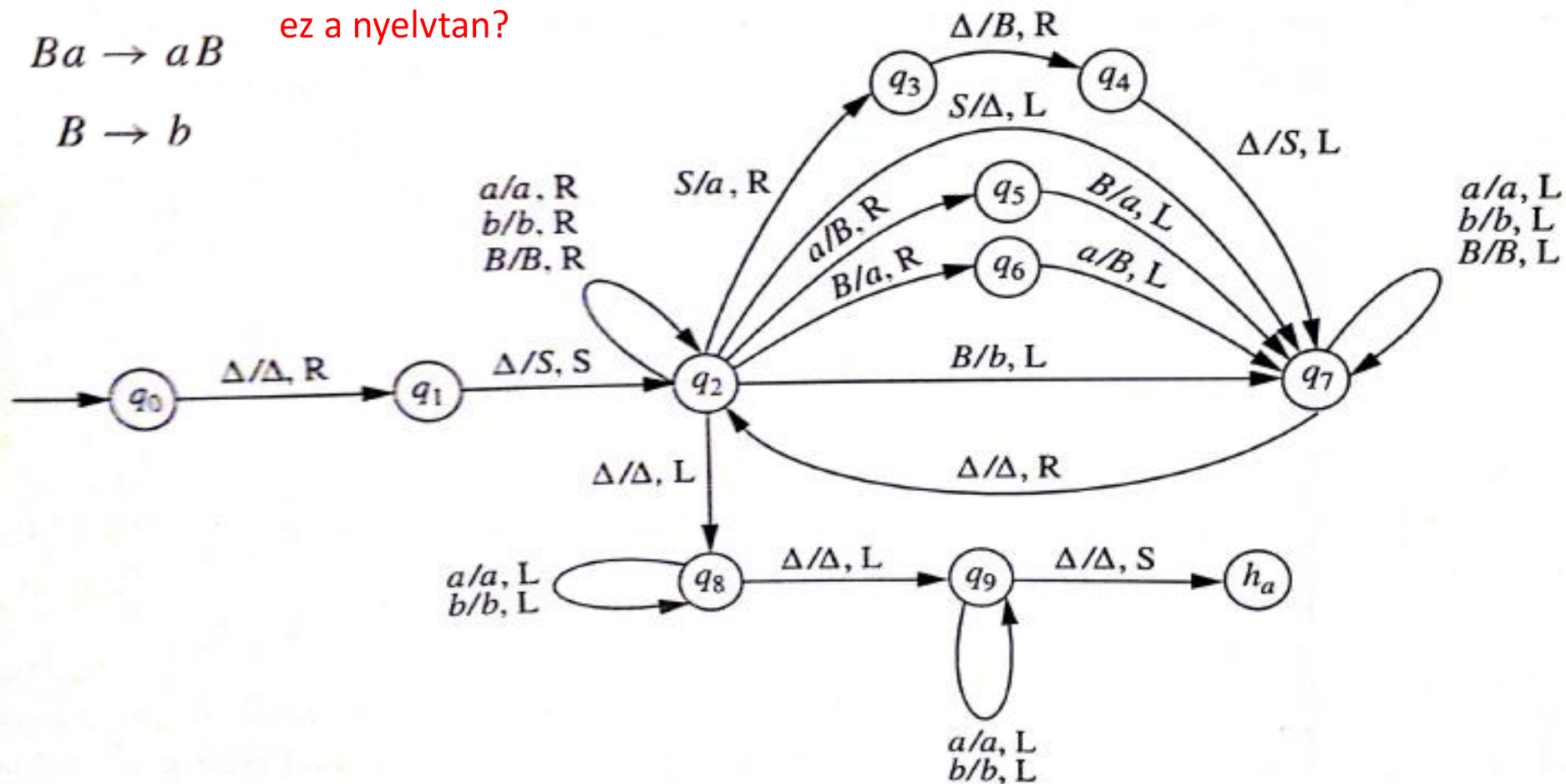
$$S \rightarrow aBS \mid \Delta$$

$$aB \rightarrow Ba$$

$$Ba \rightarrow aB$$

$$B \rightarrow b$$

Milyen nyelvet generál  
 ez a nyelvtan?



A'ltalános alábbi grammtika  
is Turing gépet

② Mide + Turing gépnek létezik egy ~~6~~  
6 grammtika, hogy  $L(G) = L(T)$ .

- G működési módja  $\Sigma^*$  helyi két generálhat  
"duplán". ( $\Sigma$  az  $L(T)$  karakterait jelölő)



pl.  $a_1 a_2 \dots a_n \in L$  esetén  $(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_n a_n)$

- G működési módja  $\Sigma^*$  helyi módon kétféle üres cellákban  
megfelelő jeleket is generálhat:

$(uu)(a_1 a_1) \dots (a_n a_n)(uu)(uu) \dots (uu)$

Teljesen pontosan.



## Birangi tai / 2

- G nyelvű generalizált  $A^T$  rendező állapotaik  
jóró minősíthetők is, azaz generalizáltak egy  
konfigurációk (  $A^T$  rendező konfigurációk ) :

$$q_0(vv)(a_1 a_1) \dots (a_k a_k)$$

- G-nél olyan nyelvű is van, amelyre a  
T állapotaik mentén nem lehet eljutni

G nyelvű :

$$S \rightarrow S(vv) | T$$

$$T \rightarrow T(a_i a_i) | q_0(vv) \quad \text{ahol}$$

ahol  $a_i \in \Sigma$  - n

## Σi-εgitei/3

### 6 natiegyi

$$S \rightarrow S(wu) \mid T$$

$$T \rightarrow T(a_i a_i) \mid q_0(wu) \quad \text{mide } a_i \in \Sigma - \epsilon$$

illetve:

- $p(xa) \rightarrow (xb)q$  ~~over~~  $\delta(p, a) = (q, b, R)$   
azet, mider  $x \in \Sigma \cup \{u\}$
- $p(xa) \rightarrow q(xb)$   $\delta(p, a) = (q, b, S)$   
azet mider  $x \in \Sigma \cup \{u\}$
- $(xy)p(za) \rightarrow q(xy)(zb)$   $\delta(p, a) = (q, b, L)$   
azet, mider  $x, y, z \in \Sigma \cup \{u\}$

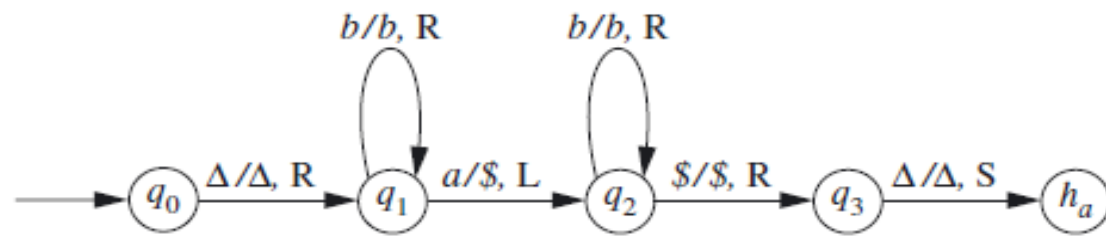
## Princípek / 4

- Ha megjelant an elfogadott állapothoz megfelelő ha szimuláció,  $G$  hirtérli a námalán hórha keletkezett hirtérlet, csak an eredeti hirtérlet csatolását tartja meg (Visszaadlija a hirtérletet)

$G$  natrályai :

$$\begin{aligned} h_a(xy) &\rightarrow h_a(xy)h_a & \forall x, y \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \\ (xy)h_a &\rightarrow h_a(xy)h_a \\ h_a(xy) &\rightarrow x \\ h_a(wx) &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$



$\underline{S}$  $\Rightarrow$  $\underline{S}(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{T}(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{T}(aa)(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{T}(bb)(aa)(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{q_0}(\Delta\Delta)(bb)(aa)(\Delta\Delta)$  $q_0\Delta ba$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)\underline{q_1}(bb)(aa)(\Delta\Delta)$  $\vdash \Delta q_1 ba$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)(bb)\underline{q_1}(aa)(\Delta\Delta)$  $\vdash \Delta b q_1 a$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)\underline{q_2}(bb)(a\$)(\Delta\Delta)$  $\vdash \Delta q_2 b \$$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)(bb)\underline{q_2}(a\$)(\Delta\Delta)$  $\vdash \Delta b q_2 \$$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)(bb)(a\$)\underline{q_3}(\Delta\Delta)$  $\vdash \Delta b \$ q_3 \Delta$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)(bb)(a\$)\underline{h_a}(\Delta\Delta)$  $\vdash \Delta b \$ h_a \Delta$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)(bb)\underline{h_a}(a\$)h_a(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $(\Delta\Delta)\underline{h_a}(bb)h_a(a\$)h_a(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{h_a}(\Delta\Delta)h_a(bb)h_a(a\$)h_a(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{h_a}(bb)h_a(a\$)h_a(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{bh_a}(a\$)h_a(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $\underline{bah_a}(\Delta\Delta)$  $\Rightarrow$  $ba$ 

(Nem érdekes milyen nyelvet fogad el a Turing gép, csak példa.)

Akar :

Az általános alábbi yelvsare elval  
generallható yelver meggyesével a  
Turing géppel elfogadható yelverrel

L nyelv „elfogadása” T-vel: ha w szó L-beli, akkor T elfogadó állapotban áll meg w-n,  
különben: T nem-elfogadó állapotban áll meg, vagy  
T egyáltalán nem áll meg

↑

Yelveres : Rekursíva yelverallható  
yelver  
Rekursíva yelverallható  
grammatikák

# Ma

- Rekurzív és rekurzívan felsorolható nyelvek, problémák mint formális nyelvek
- Általános (szabály-)alakú grammatikák és Turing gépek
- Környezetfüggő grammatikák, a Chomsky féle nyelv-hierarchia

## Környezetiírás az elv

$G = (V, \Sigma, S, P)$  Környezetiírás, ha  $P$   
generál

$\alpha \rightarrow \beta$ , ahol  $|\alpha| \leq |\beta|$

alakra.

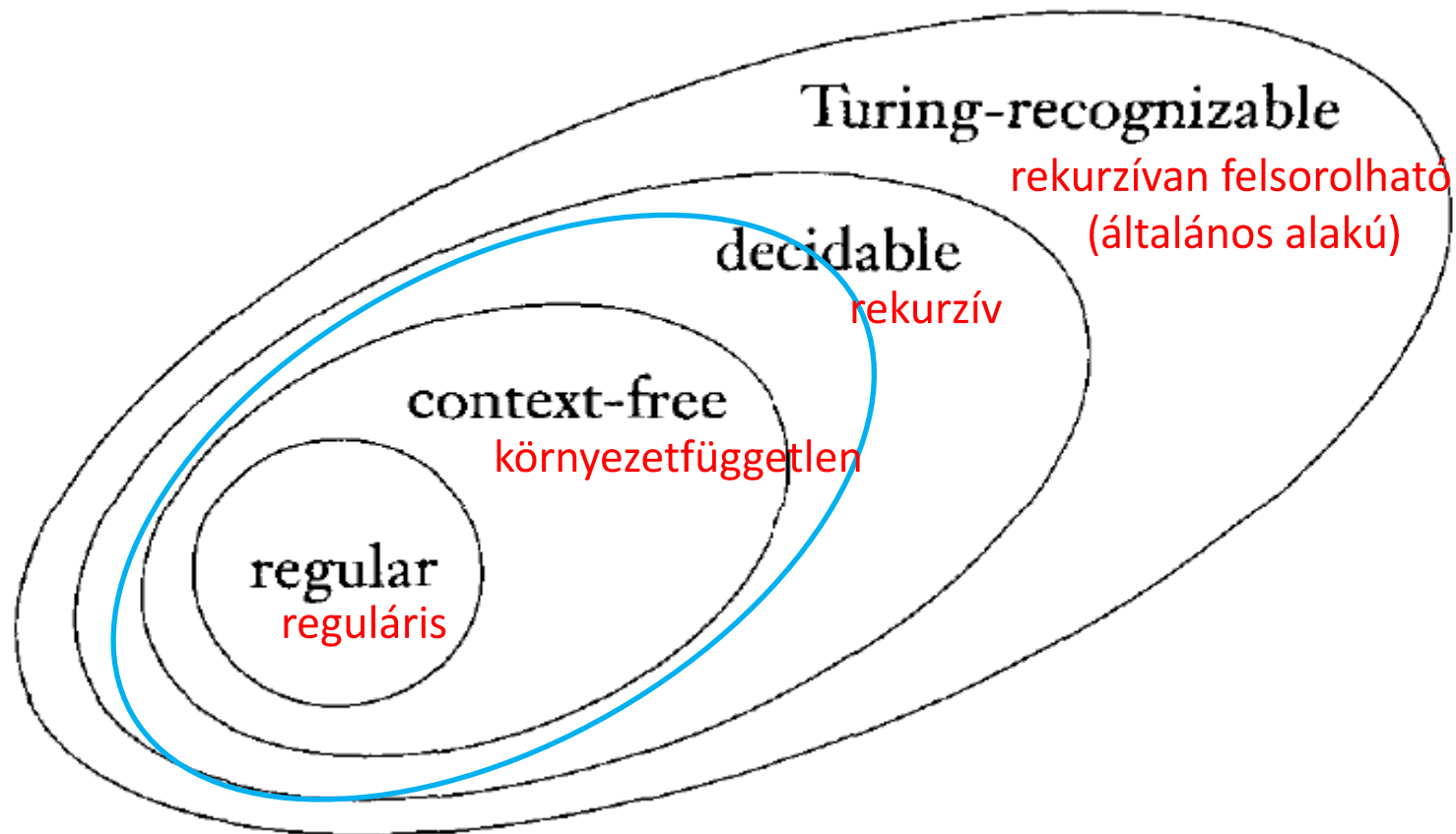
$L$  Környezetiírás, ha generál  
Környezetiírás grammatika

Leírás le, hogy mi a  
"Gyógytűző" yel  
verum

- A szabályok jóllehet nem rögzítettek, mint  
a hal, hanem
- Egy leírás van a <sup>mandat</sup> forma nem rögzített
- A szabályok néha világos, világos, a  
mandat formák nem változatlan sem mand-  
at "túl szűk".  $\Rightarrow$  könnyű leírás  
könnyű mandata.

(Algoritmus?)

La'bur, la'hi fegnier



reguláris, környezetfüggetlen, **környezetfüggő**,  
eldönthető/rekurzív, rekurzívan felsorolható

# A Chomsky's hierarchy

$$\mathcal{L}(\text{REG}) \subset \mathcal{L}(\text{CF}) \subseteq \mathcal{L}(\text{CS}) \subset \mathcal{L}(\text{RE})$$

↑  
pumpable  
lemma

↑  
!

↑  
an undecidable  
algorithm  
exists  
( $\mathcal{L}(\text{CS})$  recursive)

(A joiner's brain  
cannot solve  
undecidable problems)



$$\underline{L(CF) \subseteq L(CS)}$$

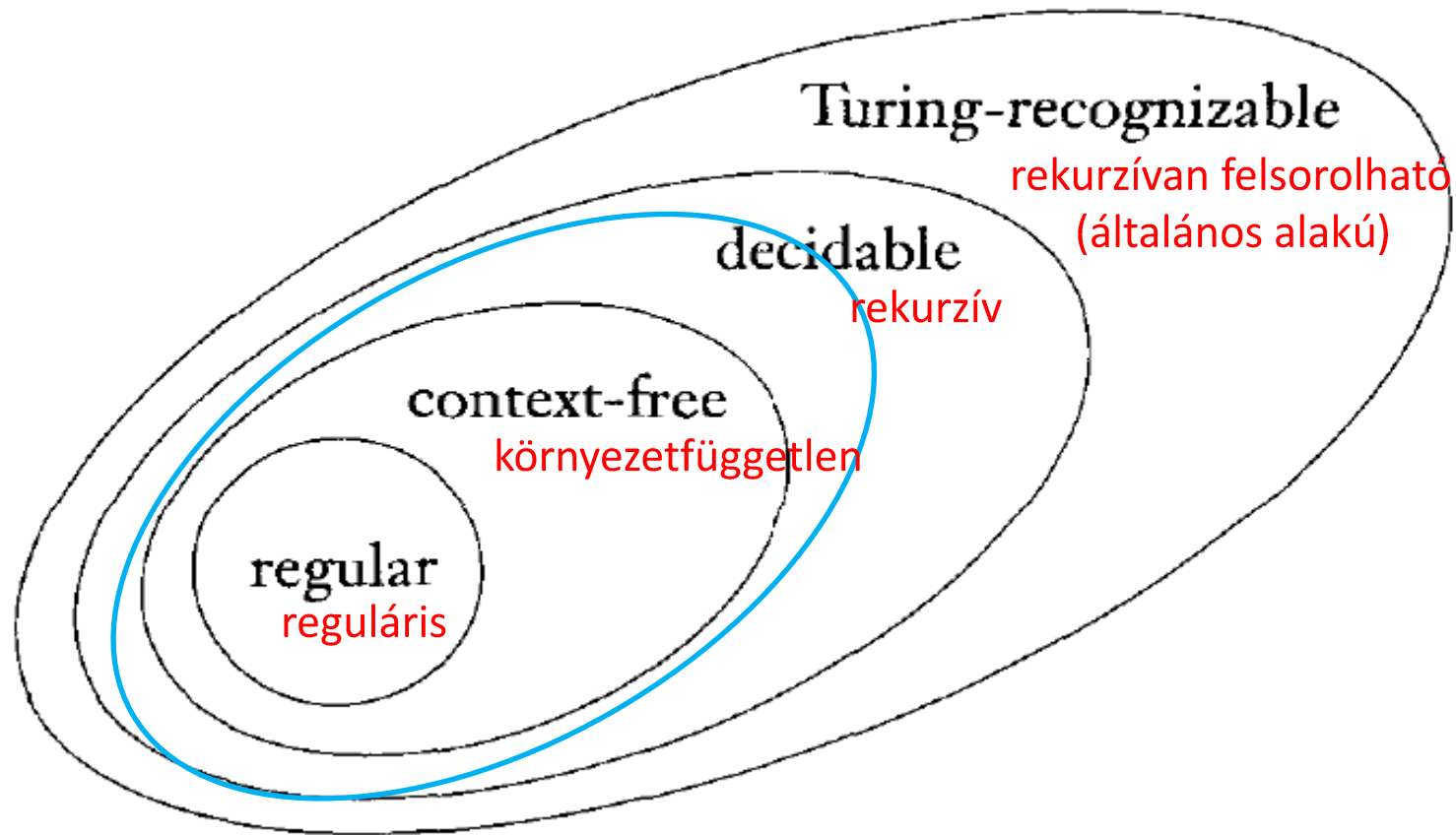
1.  $\{a^n b^n c^n\} \notin L(CF) \leftarrow$  a pumpa leri  
lema neni

2.  $\{a^n b^n c^n\} \in L(CS) \leftarrow$  generat heto'  
CeiingreA jing <sup>o</sup> ~~gama~~  
gramari ra cal

Pl.  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ , ahol

$P = \{ S \rightarrow aSBC, S \rightarrow abC, CB \rightarrow BC, B \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc \}$

La'bur, la'hi fegnier



reguláris, környezetfüggetlen, **környezetfüggő**,  
eldönthető/rekurzív, rekurzívan felsorolható